Chapitre 28

Espaces préhilbertiens réels

Dans tout ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (et non plus $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Sommaire

I Espaces préhilbertiens réel, produits scalaires et normes associées

I.1 Forme bilinéaire

Définition 28.1: Forme bilinéaire symétrique

On appelle **forme bilinéaire** sur E, toute application f de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. pour tout $x \in E$, l'application $y \to f(x,y)$ est linéaire ;
2. pour tout $y \in E$, l'application $x \to f(x,y)$ est linéaire ;

De plus, elle est symétrique si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad f(x,y) = f(y,x)$$

Définition 28.2: définie positive

Soit f une forme bilinéaire sur E, on dit que :

1. f est **positive** si : $\forall x \in E, \quad f(x,x) \geq 0$;
2. f est **définie** si : $\forall x \in E, \quad f(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$;

Remarque 28.3. *Par bilinéarité, il est évident que $f(0,0) = 0$, et ce quelle que soit l'application bilinéaire f.*

Exercice 28.4: Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des formes bilinéaires ?, symétriques ? définies ? positives ?

1. $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x,y),(x',y')) \mapsto xx' + yy' \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x,y),(x',y')) \mapsto (xx', yy') \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x,y,z),(x',y',z')) \mapsto xx' + yy' + zz' \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt \end{cases}$
5. $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) \mapsto P'Q \end{cases}$
6. $\begin{cases} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ (P,Q) \mapsto PP'Q \end{cases}$

E

I.2 Produit scalaire, espace préhilbertien réel et euclidien

Définition 28.5: Produit scalaire

On appelle **produit scalaire** sur E tout forme bilinéaire symétrique définie positive sur E.

Notation 28.6. *Si φ est un produit scalaire sur E, on note $(x|y)$ ou $\langle x, y\rangle$ ou encore $x.y$ le produit scalaire entre x et y, c'est-à-dire $f(x, y)$.*

Exemple 28.7

1) Sur $\mathbb{R}^2$, l'application :
$$\begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y),(x, y')) \mapsto xx' + yy' \end{cases}$$
est un produit scalaire, c'est le **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.**

2) Sur $\mathbb{R}^3$, l'application :
$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y, z),(x', y', z')) \mapsto xx' + yy' + zz' \end{cases}$$
est un produit scalaire, c'est le **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.**

3) Sur $\mathbb{R}^n$, l'application :
$$\begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ ((\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n),(\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_n)) \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i \end{cases}$$
est un produit scalaire, c'est le **produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.**

4) Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$, l'application :
$$\begin{cases} \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\, dt \end{cases}$$
est un produit scalaire.

Définition 28.8: Espace préhilbertien réel, espace euclidien

On appelle **espace préhilbertien réel** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Lorsque l'espace vectoriel est de dimension finie, on parle d'un **espace euclidien**.

I.3 Norme associée à un produit scalaire

Dans cette section E est un espace préhilbertien réel.

Définition 28.9: Norme euclidienne

On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle , \rangle$ l'application :
$$\begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$$

Définition 28.10: Distance euclidienne

On appelle **distance euclidienne** associée au produit scalaire $\langle , \rangle$ l'application :

$$d = \begin{cases} E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,y) \mapsto \|x-y\| \end{cases}$$

Proposition 28.11: Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- $\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$;
- Cette inégalité est une égalité si et seulement si, x et y sont proportionnelles.

Exemple 28.12

1. Dans $\mathbb{R}^2$:

2. Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$:

Exercice 28.13: Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$, démontrer que $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$. On utilisera le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

E

E

Proposition 28.14

La norme euclidienne associé au produit scalaire vérifie :

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ **(séparation)**
2. $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ **(homogénéité)**
3. $\forall(x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(inégalité triangulaire)**

Remarque 28.15.

1. *Dans l'inégalité triangulaire, il y a égalité si et seulement si x et y est positivement proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.*
2. *Plus généralement, on appelle norme sur E tout application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés précédentes. C'est donc la définition d'une norme et non une propriété.*

Proposition 28.16: Inégalité triangulaire inversée

$$\forall(x, y) \in E^2, \quad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$$

Proposition 28.17

Si d est la distance euclidienne associée à un produit scalaire alors pour tout $(x, y, z) \in E^3$:

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ **(séparation)**
- $d(x, y) = d(y, x)$ **(symétrie)**
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ **(Inégalité triangulaire)**
- $d(x, z) \geq |d(x, y) - d(y, z)|$ **(Inégalité triangulaire inversée)**

Proposition 28.18: Formules de polarisations

Soit $(x, y) \in E^2$, on a :

- $2\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$;
- $2\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$;
- $4\langle x, y\rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$.

Corollaire 28.19

Soit $(x, y) \in E^2$, on a :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales, parties orthogonales

Définition 28.20: vecteurs orthogonaux

On dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$, on note alors $x \perp y$.

Remarque 28.21. *Si x est non nul, il ne peut être orthogonal à lui-même car $\langle x, x\rangle > 0$.*

Définition 28.22: orthogonal d'une partie

On appelle **orthogonal** d'une partie A de E, l'ensemble :
$$A^{\perp} = \{x \in E,\ \forall a \in A,\ \langle a, x\rangle = 0\}$$

Proposition 28.23

L'orthogonal d'une partie de E est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque 28.24. *Attention, $A^{\perp}$ est un s.e.v. même si A n'en n'est pas un !*

Exercice 28.25: Dans $\mathbb{R}^3$ muni du p.s usuel, quel est l'othogonal à la droite vectoriel portée par le vecteur $(1, 1, 1)$ pour le produit scalaire usuel.

E

Exercice 28.26: Dans $\mathbb{R}^3$ muni du p.s. usuel,soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$, trouver l'orthogonal de P

E

E

Proposition 28.27

- Si A et B sont deux parties de E, alors :
$$A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$$
- $$A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$$

Exercice 28.28: $\{0\}^{\perp}$?

E

Exercice 28.29: Soit E un espace préhilbertien, et A et B deux parties de E. Démontrer la relation suivante : $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

E

E

Proposition 28.30: Pythagore

Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si :
$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

Définition 28.31: famille orthogonale

On appelle **famille orthogonale** de E toute famille de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.

Proposition 28.32: Pythagore généralisé

- Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre
- Si $(v_1, ..., v_n)$ est une famille de vecteurs orthogonale de E, on a :
$$\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$$

II.2 Familles orthonormales, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 28.33: unitaire et familles orthonormées

- On appelle vecteur **unitaire** ou **normée** tout vecteur de norme 1.
- On dit qu'une famille de vecteurs est orthonormée lorsque tous les vecteurs composant cette famille sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Théorème 28.34: Algorithme de Schmidt ou Gram-Schmidt

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre d'un espace euclidien E. Il existe une unique famille orthonormalisée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ telle que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

- $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ engendrent le même sous-espace ;
- $\langle e_p \mid \varepsilon_p \rangle > 0$

Algorithme 28.35: Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

$$\epsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall i \geq 2, \quad \epsilon_i = \frac{e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \langle e_i, \epsilon_k \rangle \epsilon_k}{\left\| e_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} \langle e_i, \epsilon_k \rangle \epsilon_k \right\|}$$

Exercice 28.36: $E = \mathbb{R}_2[X]$, Montrer que $\phi(P,Q) = P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3)$ est un produit scalaire sur E, utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour créer une base orthonormée (à partir de la base à partir de la base canonique, par exemple)

E

Remarque 28.37. *On peut généraliser le résultat à une famille de vecteurs indexée par* $\mathbb{N}$.

II.3 Bases orthonormales

Définition 28.38: Bases orthonormales

On appelle **base orthonormale** (ou orthonormée) de E toute base E qui est une famille orthonormale.

Théorème 28.39

Toute espace euclidien possède une base orthonormale.

Théorème 28.40: Théorème de la base orthonormale incomplète

Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Proposition 28.41: Coordonnées dans une base orthonormale

Soit $\mathbf{e} = (e_1, ...e_n)$ une base **orthonormée** de E. Si x est un vecteur de E alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Remarque 28.42. *Les coordonnées dans une base orthonormée sont donc simples à trouver car il suffit d'effectuer des produits scalaires et non de résoudre un système linéaire pour les trouver !*

Proposition 28.43: Retour au PS de $\mathbb{R}^n$

Soit $\mathbf{e}$=$(e_1, ...e_n)$ une base **orthonormée** de E, $x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i e_i$ deux vecteurs de E, et $X = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(x), Y = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes constituées des composantes de x et y dans la base $\mathbf{e}$. On a alors :

1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i = X^\top Y$
2. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\tilde{x}_i)^2 = X^\top X$

Corollaire 28.44

Cette dernière proposition indique que, dans une base orthonormée de E, faire le produit scalaire de deux vecteurs de E revient à faire le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ des vecteurs constitués des coordonnées de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 28.45

En utilisant l'exercice précédent, Calculer les coordonnées de $X + 1$ selon la base orthonormale choisie.

II.4 Espaces orthogonaux

Définition 28.46: Espaces orthogonaux

Deux sous-espaces vectoriels F et G sont **orthogonaux** si $F \subset G^{\perp}$ (ce qui revient à dire de $G \subset F^{\perp}$).

Corollaire 28.47

Ce qui revient à dire que pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\langle x, y \rangle = 0$.

Proposition 28.48

Si F est un s.e.v. de E espace vectoriel de dimension finie, alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.

Corollaire 28.49

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^{\perp})$$

II.5 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition 28.50: Projection orthogonale

Soit F un sous espace vectoriel de E espace euclidien, on appelle **projection orthogonale sur** F la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonale $F^{\perp}$.

Notation 28.51. *On le note* p_F.

Proposition 28.52: Calcul du projeté

Si $(f_1, ...f_p)$ est une base orthonormale de F alors le projeté orthogonale de $x \in E$ sur F est :

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, f_i \rangle f_i$$

Exercice 28.53: Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, calculer le projeté orthogonal du vecteur (x, y, z) sur le plan $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ \ x + y + z = 0\}$

E

II.6 Distance à un sous-espace vectoriel

Définition 28.54: Distance à une partie

Soit A une partie non vide de E et $x \in E$, on appelle **distance** de x à A la quantité :

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x, y).$$

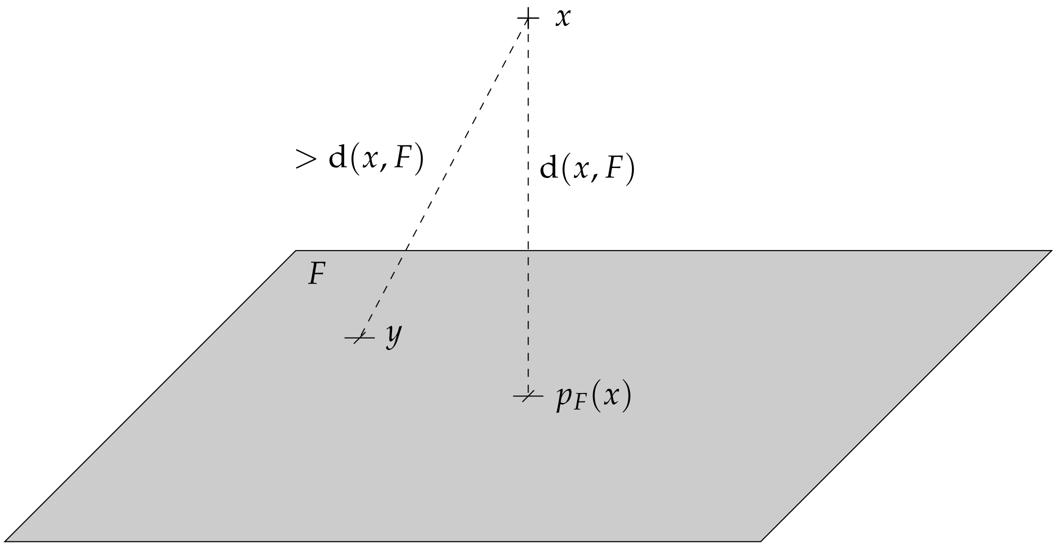
Remarque 28.55. *L'existence de cette quantité est due au fait que* $\{\mathrm{d}(x, y),\ y \in A\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *minorée par* 0.

Proposition 28.56: Distance à un sous-espace vectoriel

Soit F un s.e.v. d'un espace euclidien E et p_F la projection orthogonale de F . Soit $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté orthogonale $p_F(x)$. Autrement dit :

1. $\mathrm{d}(x, F) = d(x, p_F(x))$

2. $\forall y \in F, \quad \mathrm{d}(x,F) = d(x,y) \Longleftrightarrow y = p_F(x)$



Exercice 28.57: Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left(\int_{-1}^{1}(x^2-(ax+b))^2dx\right)$ en interprétant cette expression en termes de distance. En déduire une méthode pour calculer :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \left(\int_{-1}^{1}(x^3-(ax^2+bx+c))^2dx\right)$$

E

E

Proposition 28.58: Distance à un hyperplan

Soit $e = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et H un hyperplan d'équation :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i e_i \in H \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}_i = 0$$

alors, pour tout $y \in E$, dont les coordonnées dans la base e sont notées $(\tilde{y}_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$, on a :

$$d(y, H) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{y}_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

Appendices

Cette partie est devenue hors-programme de MPSI.

28.A Isométries vectorielles

28.A.1 Isométries vectorielles et symétries orthogonales

On suppose dans cette sous-section que E est un espace euclidien (de dimension finie).

Définition 28.59: Isométries vectorielles

On appelle **isométrie vectorielle** ou **automorphisme orthogonal** de E tout ***endomorphisme*** f de E conservant la norme, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$$

Notation 28.60. *On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, on l'appelle le* ***groupe orthogonal****.*

Proposition 28.61: isométrie => automorphisme et conservation du PS

1. Une isométrie vectorielle de E est un automorphisme de E.
2. un endomorphisme f est une isométrie si et seulement si elle conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Exemple 28.62

Dans $\mathbb{R}^2$ l'endomorphisme $(x,y) \to (y,x)$ est une isométrie vectorielle.

Exemples : les symétries orthogonales

Définition 28.63: Symétrie orthogonale

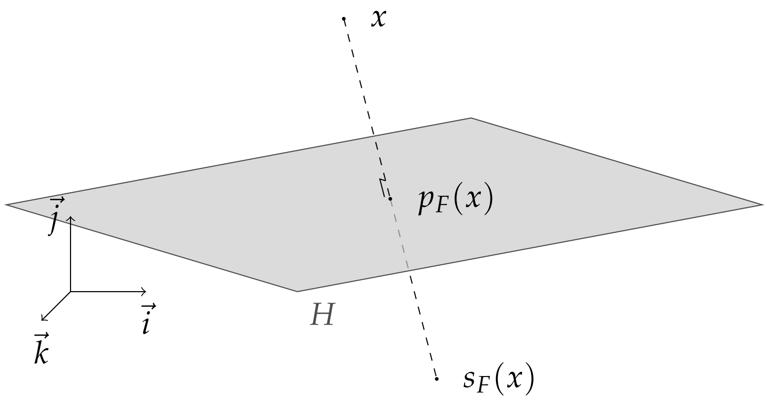
On appelle **symétrie orthogonale** toute symétrie par rapport à un s.e.v. F et parallèlement à son orthogonal $F^\perp$.
On appelle **réflexion** tout symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Proposition 28.64: symétrie orthogonale = isométrie + symétrie

Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle. Réciproquement, les symétries qui sont également des isométries sont des symétries orthogonales.

Exemple 28.65

Dans $\mathbb{R}^3$, la réflexion par rapport à l'hyperplan d'équation $x - 2y + z = 0$ envoie le point $x = (1,4,1)$ sur $s_F(x) = (3,0,3)$.



Proposition 28.66: Caractérisation des isométries vectorielles

Soit **e** une base orthonormée de E, un endomorphisme f de E est une isométrie vectorielle si et seulement si, l'image de **e** est une base orthonormée.

Corollaire 28.67

f est une isométrie vectorielle si et seulement si pour une base orthonormée quelconque de E, la famille des images des vecteurs de la base forment une base orthonormale de E. De plus, f envoie toute base orthonormale sur une base orthonormale.

Proposition 28.68: Stabilité par composition et passage à l'inverse

1. La composée de deux isométries vectorielles de E est une isométrie vectorielle de E.
2. La réciproque d'une isométrie vectorielle de E est une isométrie vectorielle de E.

Corollaire 28.69

$(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(G\mathcal{L}(E), \circ)$.

28.A.2 Matrices orthogonales

Définition 28.70: Matrices orthogonales

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une **matrice orthogonale** si elle vérifie :

$$M^\top M = I_n$$

Notation 28.71. *On note l'ensemble des ces matrices $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou encore $\mathcal{O}(n)$, on l'appelle **le groupe orthogonal**.*

Proposition 28.72: Différentes caractérisations des matrices orthogonales

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. M est une matrice orthogonale ;
2. M est inversible d'inverse $M^\top$;
3. $MM^\top = I_n$;

4. $M^\top$ est une matrice orthogonale ;
5. les colonnes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$;
6. les lignes de M forment une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 28.73: Lien avec les automorphismes orthogonaux

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E, espace vectoriel de dimension finie n. Un endomorphisme ϕ de E est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathbf{e}$ est orthogonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathbf{e}}(\phi) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Proposition 28.74

Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E. Une base $\mathbf{e'}$ est orthonormale si, et seulement si, la matrice de passage de $\mathbf{e}$ à $\mathbf{e'}$ est une matrice orthogonale : $P_{\mathbf{e}}^{\mathbf{e'}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Groupe orthogonal et le groupe spécial orthogonal

Proposition 28.75: stabilité par passage à l'inverse et multiplication matricielle

- Le produit de deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale ;
- L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale.

Corollaire 28.76

$(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$ est un sous-groupe de $(G\mathcal{L}_n(\mathbb{R}), \times)$

Proposition 28.77

Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(M) = \pm 1$.

Définition 28.78: Matrices positives/négatives et groupe spécial orthogonal

Une matrice orthogonale est dite **positive** si son déterminant est positif, sinon elle est **négative**. On note $S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales positives, on l'appelle le **groupe spécial orthogonal**.

Proposition 28.79

$S\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et de $G\mathcal{L}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 28.80

Si f est une isométrie, alors $\det(f) = \pm 1$.

Définition 28.81: Isométrie positive, négative

Une isométrie est dite **positive** (ou **directe**) si son déterminant vaut 1 sinon elle est dite **négative** (ou **indirecte**).

Notation 28.82. *On note $S\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries positives de E.*

Proposition 28.83

$(S\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$.

Exercice 28.84: Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire ϕ défini par $\phi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$. On considère l'endomorphisme f définie par $f(P)(X) = P(-X)$. Démontrer que f est une isométrie. Montrer que f est une symétrie orthogonal. Donner la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base canonique "orthonormalisée" par Gram-Schmidt.

E

HP

Produit mixte

- Si E est de dimension n, on appelle **produit mixte** de n vecteurs $v_1, ...v_n$ leur déterminant dans n'importe quelle **base orthonormale directe**. On le note $[v_1, ..., v_n]$.
- Soit **e** et **e'** deux bases orthonormales directes, alors on a :
$$\forall (v_1, v_2, .., v_n) \in E^n, \quad \det_{\mathbf{e}}(v_1, ..., v_n) = \det_{\mathbf{e}'}(v_1, ..., v_n).$$
- Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ représente le volume (au signe près) du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- Nous avons vu que le déterminant ne dépend pas de la base choisie.

28.A.3 Isométries vectorielles en dimension 2

Théorème 28.85: $S\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

$$S\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Théorème 28.86: $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = S\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Notation 28.87. *On note* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$*, on l'appelle matrice de rotation d'angle* θ*.*

Proposition 28.88

1. Pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R(\theta + \theta') = R(\theta) \times R(\theta')$.
2. Le groupe $(S\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif.

Proposition 28.89

Si r est une isométrie positive, alors il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$, tel que dans toute base orthonormale directe de E la matrice de r est $R(\theta)$.

Remarque 28.90. *Les isométries positives sont donc les rotations.*

Définition 28.91: angle orienté

En géométrie, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, on appelle **mesure de l'angle orienté de vecteurs** $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$, une mesure θ de l'angle de la rotation qui transforme $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ en $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. On note alors :
$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \theta \mod 2\pi$$

Proposition 28.92: Relation de Chasles

Pour tout vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$$\widehat{(\vec{u},\vec{w})} \equiv \widehat{(\vec{u},\vec{v})} + \widehat{(\vec{v},\vec{w})} \mod 2\pi$$

Proposition 28.93

Soit $\mathbf{e}= (e_1, e_2)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$, les isométries négatives de plan sont les réflexions par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\cos(\theta/2)e_1 + \sin(\theta/2)e_2$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Sa matrice est alors $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Proposition 28.94

1. Si D et D' sont deux droites vectorielles dirigées respectivement par $\vec{u}$ et $\vec{u'}$, s_D et $s_{D'}$ les réflexions par rapport à ces deux droites. Alors la composée des deux réflexions $s_{D'} \circ s_D$ est la rotation d'angle $2\widehat{(\vec{u},\vec{u'})}$.
2. Réciproquement, toute rotation peut s'écrire comme produit de deux réflexions dont l'une peut-être choisie arbitrairement.

Corollaire 28.95

Toute isométrie du plan est soit une réflexion soit le produit de deux réflexions.

28.B Hyperplan affine d'un espace euclidien

Définition 28.96: Repère orthonormal

On appelle **repère orthonormal** de E, tout couple $(\Omega, \mathbf{e})$, où Ω est un point de E et $\mathbf{e}$ une base orthonormale de E.

Définition 28.97: Vecteur normal à un hyperplan affine

Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction H, on appelle vecteur **normal** à $\mathcal{H}$, tout vecteur $\vec{n}$ non nul et orthogonal à tout vecteur de H.

Notation 28.98. *On dit que $\mathcal{H}$ est **orthogonal** à $\vec{n}$.*

Proposition 28.99

Soit $\mathcal{R} = (\Omega, \mathbf{e})$ un repère orthonormal de E, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de direction H et orthogonal à $\vec{n} = (a_1, ..., a_n)$;
2. H est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto \langle \vec{n}, x \rangle$;

3. l'hyperplan affine $\mathcal{H}$ admet une équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$ de la forme :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0.$$
avec $(a_1, a_2, ..., a_n) \neq (0...0)$.

Définition 28.100: Orientation d'un hyperplan

Si l'espace E est orienté, **orienter un hyperplan affine** $\mathcal{H}$ revient à choisir sont vecteur orthogonal v. On dit de la base $(e_1, ...e_{n-1})$ de la direction H est directe si la base de E $(e_1, ..., e_{n-1}, v)$ est directe, sinon elle est indirecte.

Exercice 28.101: Quel est l'équation de l'hyperplan affine orthogonal au vecteur (1,1,1) passant par le point (1,-1,1) ?

E

Exercice 28.102: Quel est l'équation de l'hyperplan affine orthogonal au vecteur (1,1,2,1) passant par le point (1,-1,0,1) ?

E

Distance à un hyperplan affine

Proposition 28.103

Si $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E alors pour tout point M de E il existe un unique point A de $\mathcal{F}$ tel que :
$$\mathrm{d}(M, \mathcal{F}) = \left\| \overrightarrow{MA} \right\|$$
Ce point est appelé projeté orthogonal de M sur $\mathcal{F}$.

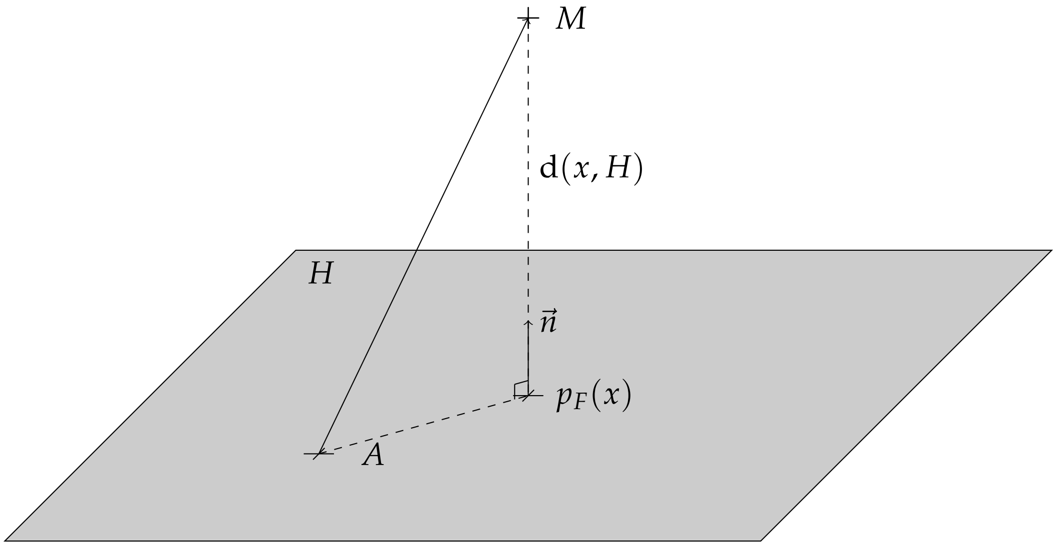
Proposition 28.104

1. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan de E, A un point de $\mathcal{H}$ et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Si M est un point de E alors on a :
$$\mathrm{d}(M, \mathcal{H}) = \frac{\left| \vec{n}.\overrightarrow{AM} \right|}{\|\vec{n}\|}$$
.

2. Si, dans un repère orthonormal, l'équation de l'hyperplan est $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + h = 0$ alors la

distance du point M de coordonnées $(m1, ..., m_n)$ dans cette même base est donnée par :

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{F}) = \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i m_i + h\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$



Exercice 28.105: Quelle est la distance de $(2, 1, 0)$ à l'hyperplan de l'exercice précédent ?

E